O Teorema de Lee-Yang

Paulo Cupertino Lima *

17 de maio de 2004

1 Introdução

O termo " transição de fase" no presente contexto será usado para indicar uma dependência não-analítica da energia livre em relação às variáveis termodinâmicas, por exemplo, o campo magnético.

Como um exemplo de transição de fase mencionaremos um sistema magnético onde, experimentalmente, a situação é a seguinte: se um campo magnético h é aplicado a um magneto (numa direção particular) a uma temperatura baixa ($T < T_c$, onde T_c é a temperatura de Curie) o magneto adquire uma magnetização $M(h, T)$ (derivada da energia livre em relação a h). Se o campo magnético é desligado, ficará uma magnetização residual ou expontânea $m_o(T) = \lim_{h \to 0_+} M(h, T)$, desde que $T < T_c$. Quando $T \geq T_c$, não existe nenhuma magnetização expontânea e m_o anula-se subitamente em $T = T_c$. As fases abaixo e acima de T_c são chamadas de ferromagnética e paramagnética, respectivamente.

O Teorema de Lee-Yang é um resultado que estabelece a analiticidade da energia livre em h para $Re\, h \neq 0$, ou em termos da fugacidade $z = e^{-2\beta h}$, para $|z| \neq 1$, onde β é o inverso da temperatura.

A fim de estudar a energia livre, nos restringiremos ao modelo de Ising, que é um modelo matemático que simula a transição de Curie da fase ferromagnética para a fase paramagnética.

2 Definições e Resultados

O Modelo de Ising. Seja Λ um subconjunto finito de Z^d. A cada ponto de

*Conferência apresentada na III Reunião Regional da Sociedade Brasileira de Matemática na UFMG 5, 6 e 7 de maio de 1993

$i \in \Lambda$ associamos uma "variável de spin" σ_i assumindo valores ± 1. Pares de vizinhos próximos de Λ são denotados por (ij). Uma configuração de spins $\sigma = \{\sigma_i\}_{i\in\Lambda}$ é um elemento de $\{-1,+1\}^{|\Lambda|}$, onde $|\Lambda| = Card(\Lambda)$. Definimos o Hamiltoniano, $H_\Lambda(\sigma)$, de uma configuração $\sigma = \{\sigma_i\}_{i\in\Lambda}$, como

$$H_\Lambda(\sigma) = -\sum_{(ij)} J(\sigma_i\sigma_j - 1) - \sum_{i\in\Lambda} h(\sigma_i - 1) \tag{1}$$

onde $J \geq 0$. O primeiro termo representa a interação entre os spins e o segundo termo representa a interação dos spins com o campo magnético, h.

As funções partição, Z_Λ, e energia livre por volume, f_Λ, são definidas como

$$Z_\Lambda(h) = \sum_\sigma e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)} \tag{2}$$

e

$$f_\Lambda(h) = \frac{1}{|\Lambda|} \ln Z_\Lambda \tag{3}$$

respectivamente, onde a soma em (2) é feita sobre todas as configurações de spins σ.

Observação 1 *A definição acima de $H_\Lambda(\sigma)$, difere da usual apenas por um fator de normalização que não afeta as propriedades de analiticidade que estaremos interessados em estudar.*

O problema matemático associado com transições de fase só se manifesta no limite termodinâmico, isto é, no limite em que o tamanho do sistema, $|\Lambda|$, tende a infinito, por exemplo, no sentido de van Hove (veja definição no Apêndice A).

Lema 1 *Seja Z_Λ definida em (2) com h real. Se $\Lambda_n \to \infty$ no sentido de van Hove, então o limite*

$$f = \lim_{n\to\infty} f_{\Lambda_n}$$

existe e será denotado por f, a energia livre do sistema.

Prova. Pela primeira desigualdade de Griffiths [2], a seqüência $\{f_\Lambda\}$ é monótona crescente, por outro lado, $f_\Lambda \leq 2\beta|h|$. ■

Dada uma configuração de spins $\sigma = \{\sigma_i\}_{i\in\Lambda}$, seja

$$S = \{i \in \Lambda : \sigma_i = -1\},$$

isto estabelece uma correspondência biunívoca entre as configurações de spins $\sigma \in \{-1,+1\}^{|\Lambda|}$ e os subconjuntos $S \subset \Lambda$. Se definirmos $z = e^{-2\beta h}$ e

$$A_{ij} = \begin{cases} e^{-2\beta J}, & i \in S,\ j \in \Lambda - S \text{ e } |i-j| = 1 \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, teremos

$$\begin{aligned} Z_\Lambda &= \sum_\sigma e^{\beta \sum_{(ij)} J(\sigma_i\sigma_j - 1) + \beta \sum_{i\in\Lambda} h(\sigma_i - 1)} \\ &= \sum_{S\subset\Lambda} z^{Card(S)} \left(\prod_{i\in S} \prod_{j\in\Lambda - S} A_{ij} \right) \\ &= \mathcal{P}_{|\Lambda|}(z, \ldots, z). \end{aligned}$$

Teorema 1 **[4]** *Seja* $(A_{ij})_{i\neq j}$ *uma família de números reais tais que* $-1 \le A_{ij} \le 1$, $A_{ij} = A_{ji}$ *para* $i = 1, \ldots, n$. *Seja* $\mathcal{P}_n$ *o seguinte polinômio*

$$\mathcal{P}_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_S z^S \left(\prod_{i\in S} \prod_{j\in S'} A_{ij} \right) \tag{4}$$

onde a soma é sobre todos os subconjuntos $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$ *de* $\{1, \ldots, n\}$, $z^S = z_{i_1} \ldots z_{i_s}$ *e* S' *é o complemento de* S *em* $\{1, \ldots, n\}$. *Então* $\mathcal{P}_n(z_1, \ldots, z_n) = 0$ *e* $|z_1| \ge 1, \ldots, |z_{n-1}| \ge 1$ *implica* $|z_n| \le 1$.

Observação 2 *Adotaremos a seguinte convenção:* $A_{ij} = 1$ *se* S *ou* S' *for vazio.*

Corolário 1 (Lee-Yang). *Seja* Z_Λ *definida por (2), então* $Z_\Lambda(h) \neq 0$ *para* $Re\, h \neq 0$.

Prova. Seja $|\Lambda| = n$ então $Z_\Lambda = \mathcal{P}_n(z, \ldots, z) \equiv \mathcal{P}_n(z)$ (veja apêndice A), logo, $Z_\Lambda = 0$ se, e somente se, $\mathcal{P}_n = 0$. Segue-se da definição de $\mathcal{P}_n$ que $\mathcal{P}_n(z^{-1}) = z^{-n}\mathcal{P}_n(z)$; portanto, $\mathcal{P}_n(z) = 0$, implica $\mathcal{P}_n(z^{-1}) = 0$.

Suponha que $\mathcal{P}_n(z) = 0$. Então temos as seguintes possibilidades: ou (i) $|z| \ge 1$ e pelo Teorema 1, devemos ter $|z| \le 1$, logo, $|z| = 1$, ou (ii) $|z^{-1}| \ge 1$ e como $\mathcal{P}_n(z^{-1}) = 0$, pelo Teorema 1, devemos ter $|z^{-1}| \leq 1$, portanto, $|z| = 1$. Logo, $\mathcal{P}_n(z) = 0$ implica $|z| = 1$, ou seja $Re\, h = 0$. ■

Proposição 1 *A energia livre f existe e é analítica em h para $Re\, h \neq 0$.*
Prova. Considere a seguinte função

$$g_\Lambda(h) = Z_\Lambda(h)^{\frac{1}{|\Lambda|}} = e^{f_\Lambda(h)},$$

então

$$g_\Lambda(h) \leq 2e^{2\beta|h|}. \tag{5}$$

Seja $\mathcal{D}$ uma região limitada e simplesmente conexa, no plano complexo h, com um segmento do eixo real e positivo de h em seu interior. Pelo Lema 1, $\lim_{|\Lambda|\to\infty} g_\Lambda$ existe neste segmento, o qual será denotado por g. Além disso, de (5), existe uma constante $E(\mathcal{D}, \beta)$ tal que

$$g_\Lambda(h) \leq E(\mathcal{D}, \beta) \tag{6}$$

para todo $h \in \mathcal{D}$ e Λ e pelo Corolário 1, para cada Λ na seqüência $\{Z_\Lambda\}$ nenhum zero de Z_Λ, portanto de g_Λ, ocorre em $\mathcal{D}$. Então g pode ser extendida a uma função analítica $g(h)$ em $\mathcal{D}$ e, em particular, analítica no segmento do eixo real h dentro de $\mathcal{D}$. Em qualquer região limitada $\mathcal{D}'$ em $\mathcal{D}$ a seqüência $\{g_\Lambda(h)\}$, definida por continuação analítica através do eixo real positivo em D, converge uniformente para $g(h)$.

De fato, pelo Teorema de Vitali [3] (veja apêndice B) , a seqüência de funções analíticas g_Λ definidas por (5) a qual é limitada em $\mathcal{D}$ e converge numa porção do eixo h real dentro de $\mathcal{D}$, converge para uma função analítica no interior de $\mathcal{D}$ e converge uniformemente em $\mathcal{D}'$ (que podemos assumir simplesmente conexo). Pelo Teorema de Hurwitz [3] (veja apêndice B), o limite, g, não tem zeros no interior de $\mathcal{D}$ (ela não pode ser zero em toda parte, visto que g_Λ nunca é menor que 1 para h real). Consequentemente, seu logarítmo f, é analítico no interior de $\mathcal{D}$ e limitado em $\mathcal{D}'$. A convergência uniforme de e^{f_Λ} em $\mathcal{D}'$ guarante que f_Λ também converge uniformemente. ■

3 Prova do Teorema 1

Seja $\Delta_n = \{1, \ldots, k\}$, então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}) &= \sum_{S \in \Delta_n} z^{-S} \prod_{i \in S} \prod_{j \in \Delta_n - S} A_{ij} \\
&= z^{-\Delta_n} \sum_{S \in \Delta_n} z^{\Delta_n - S} \prod_{i \in S} \prod_{j \in \Delta_n - S} A_{ij} \\
&= z^{-\Delta_n} \sum_{\tilde{S} \in \Delta_n} z^{\tilde{S}} \prod_{i \in \Delta_n - S} \prod_{j \in \tilde{S}} A_{ij} \\
&= z^{-\Delta_n} \sum_{\tilde{S} \in \Delta_n} z^{\tilde{S}} \prod_{i \in \Delta_n - S} \prod_{j \in \tilde{S}} A_{ji}, \quad A_{ij} = A_{ji} \\
&= z^{-\Delta_n} \sum_{\tilde{S} \in \Delta_n} z^{\tilde{S}} \prod_{j \in \tilde{S}} \prod_{i \in \Delta_n - S} A_{ji}, \\
&= z^{-\Delta_n} \mathcal{P}_n(z_1, \ldots, z_n) \\
&\equiv z_1^{-1} \ldots z_n^{-1} \mathcal{P}_n(z_1, \ldots, z_n),
\end{aligned}$$

portanto,

$$\mathcal{P}(z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}) z_1^{-1} \ldots z_n^{-1} \mathcal{P}_n(z_1, \ldots, z_n). \tag{7}$$

Adotaremos a seguinte convenção: quando S ou $S' = \Delta_n - S$ em (4) for conjunto vazio, o coeficiente correspondente será 1, portanto, $\mathcal{P}_o \equiv 1$.

Podemos assumir que $A_{ij} \neq 0, \pm 1$, se a proposição for provada neste caso ela sera válida no caso geral por continuidade.

A seguir, listaremos os quatro primeiros polinômios

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0 &= 1 \\
\mathcal{P}_1(z_1) &= 1 + z_1 \\
\mathcal{P}_2(z_1, z_2) &= 1 + A_{12}\, z_1 + A_{21}\, z_2 + z_1 z_2 \\
\mathcal{P}_3(z_1, z_2, z_3) &= 1 + A_{12} A_{13} z_1 + A_{21} A_{23}\, z_2 + A_{31} A_{32}\, z_3 + \\
&\quad + A_{13} A_{23} z_1 z_2 + A_{12} A_{32} z_1 z_3 + A_{21} A_{31} z_2 z_3 + z_1 z_2 z_3.
\end{aligned}$$

Note que $\mathcal{P}_1(z_1) = 0$ implica $|z_1| = 1$. Isto prova a proposição para $n = 1$. Além disso, $\mathcal{P}_2(z_1, z_2) = 0$ implica que

$$z_1 = -\frac{1 + A_{21} z_2}{A_{12} + z_2} \equiv -\frac{A + C z_2}{B + D z_2} \tag{8}$$

que é uma transformação de Möbius que leva $z_2 = \infty$ em $z_1 = -A_{12} = -C/D$. Mostraremos que se $\mathcal{P}_2(z_1', z_2') = 0$ e $|z_1'| \geq 1$ então, $|z_2'| \leq 1$. De fato, se $|z_2'| > 1$ (podemos assumir que $|z_1'| > 1$), tomaríamos uma reta, Γ, passando por z_2' e que não cortasse o círculo unitário $|z_2| = 1$, nem passe por $z_2 = -A_{12} = -B/D$. A imagem de Γ pela transformação (8) é um círculo no plano z_1 o qual passa por $z_1 = -A_{12} = -C/D$ e por $z_1 = z_1'$ que são as imagens de $z_2 = \infty$ e $z_2 = z_2'$, respectivamente, como $|-C/D| < 1$ e $|z_1'| \geq 1$, a imagem de Γ é um círculo que intersecta o círculo unitário em dois pontos, seja z_1'' um destes pontos e z_2'' o ponto de Γ que é levado neste. Com isso, teríamos encontrado pontos z_1'' e z_2'', tais que, $\mathcal{P}_2(z_1'', z_2'') = 0$, com $|z_1''| = 1$ e $|z_2''| > 1$. De (7), temos a seguinte propriedade: $\mathcal{P}_2(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = z_1^{-1} z_2^{-1} \mathcal{P}_2(z_1, z_2)$, portanto,

$$\mathcal{P}_2(z_1'', z_2''^{*-1}) = \mathcal{P}_2((z_1''^{*})^{-1}, (z_2''^{*})^{-1})) = z_1''^{*-1} z_2''^{*-1} \mathcal{P}_2(z_1'', z_2'')^* = 0,$$

logo, z_1'' é imagem de $z_2''^{*-1}$ através de (8), como esta é injetiva, teríamos que $z_2'' = z_2''^{*-1}$, o que não pode acontecer, visto que z_2'' estanto em Γ tem módulo maior do que 1.

Se fizermos $\mathcal{P}_3(z_1, z_2, z_3) = 0$, teremos

$$z_2 = -\frac{A + Cz_3}{B + Dz_3}, \tag{9}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= 1 + A_{12}A_{13}z_1, \\ B &= A_{12}A_{23} + A_{13}A_{23}z_1, \\ C &= A_{12}A_{32} + A_{31}A_{32}z_1, \\ D &= A_{21}A_{31} + z_1. \end{aligned}$$

Se z_1, z_2, z_3 são tais que $\mathcal{P}_3(z_1, z_2, z_3) = 0$, $|z_1|, |z_2| \geq 1$. Então,

$$D = A_{21}A_{31}\left(1 + A_{21}^{-1}A_{31}^{-1}z_1\right) = A_{21}A_{31}\mathcal{P}_1(\xi_1), \quad \xi_1 \equiv A_{21}^{-1}A_{31}^{-1}z_1$$

com $|\xi_1| > 1$, como $\mathcal{P}_1(\xi_1) \neq 0$, temos $D \neq 0$.

Note que ∞ é levado em $z_2 = -C/D$ através da transformação (9). Logo, para esta escolha de z_2 (z_1 o mesmo de antes), temos

$$\begin{aligned} 0 &= C + Dz_2 = A_{31}A_{32} + A_{12}A_{32}z_1 + (A_{21}A_{31} + z_1)z_2 \\ &= A_{31}A_{32}\left(1 + A_{12}A_{31}^{-1}z_1 + A_{21}A_{32}^{-1}z_2 + A_{31}^{-1}z_1A_{21}A_{32}^{-1}z_2\right) \\ &= A_{31}A_{32}\mathcal{P}_2(\xi_1, \xi_2), \end{aligned}$$

onde $\xi_1 = A_{31}^{-1}A_{31}^{-1}z_1$ e $\xi_2 = A_{31}^{-1}A_{32}^{-1}z_2$. Assim, como $|\xi_1| = |A_{31}^{-1}A_{31}^{-1}z_1| > 1$, logo, $|\xi_2| \leq 1$, portanto, $|-C/D| = |z_2| < |\xi_2| \leq 1$. Vamos supor o Teorema não fosse verdade para $n = 3$, ou seja que houvesse z_1', z_2', z_3', tais que $\mathcal{P}_3(z_1', z_2', z_3') = 0$ e $|z_1'| \geq 1$, $|z_2'| \geq 1$ e $|z_3'| > 1$. Fixe o valor de z_1' acima (vamos assumir que $|z_2'| > 1$), portanto, estamos fixando os coeficientes A, B, C, D, ou seja, estaremos nos referindo à mesma transformação de Möbius. Vimos que $D \neq 0$ e que a transformação leva ∞ em $-C/D$, com $|-C/D| \leq 1$. Usando a mesma idéia anterior, podemos encontrar z_3'' fora do círculo unitário tal ele seja levado em z_2'' através de (9) e $|z_2''| = 1$. Se $|z_1| = 1$, estamos feito, senão olhamos para a transformação de Möbius

$$z_1 = -\frac{A + Cz_3}{B + Dz_3}, \tag{10}$$

onde os coeficientes agora dependem de z_2'', como $|z_2''| = 1$, então $D \neq 0$. Esta transformação z_3'' em z_1'' e ∞ em $-C/D$, $|-C/D| \leq 1$. Usando a construção anterior, podemos encontrar z_3''' fora do círculo unitário e z_1''' no círculo unitário, tal que este seja a imagem de z_3''' através da transformação (10). Com isso teriamos encontrado z_1''', $z_2''' = z_2''$ e z_3''', tais que $\mathcal{P}_3(z_1''', z_2''', z_3''') = 0$ e $|z_2'''| = |z_1'''| = 1$ e $|z_3'''| > 1$, o que nos leva a uma contradição, pois, $\mathcal{P}_3(z_1^{-1}, z_2^{-1}, z_3^{-1}) = z_1^{-1}z_2^{-1}z_3^{-1}\mathcal{P}_3(z_1, z_2.z_3)$ e teríamos $z_1''' = z_1'''^{*-1}$, impossível, visto que $|z_1'''| > 1$.

Esta é a estratégia que usaremos na demonstração por indução (para $n \geq 4$).

Lema 1 *Suponha que a Proposição seja verdadeira para $n-1$ e $n-2$. Defina A, B, C e D como funções de z_{i_s}, $i_s \in \Delta_{n-1} - k \equiv X$, por*

$$\mathcal{P}_n(z_1, \ldots, z_n) = A + Bz_k + Cz_n + Dz_kz_n, \tag{11}$$

então $D \neq 0$ and $\mathcal{P}_n(z_1, \ldots, z_n) = 0$ define a seguinte transformação de Möbius:

$$z_k = -\frac{A + Cz_n}{B + Dz_n} \tag{12}$$

que leva ∞ em $z_k = -\frac{C}{D}$, com $|z_k| < 1$.

Prova do Lemma 1. Assuma a hípótese de indução para $n-1$ e $n-2$ e que $|z_i| \geq 1$, para todo $i \in X$. Note que por definição $\mathcal{P}_n(z_1, \ldots, z_n) = A + Bz_k + Cz_n + Dz_kz_n$, em Dz_kz_n temos os conjuntos da forma $S \cup \{k, n\}$, onde $S \subset X$, então,

$$
\begin{aligned}
Dz_kz_n &= \sum_{S\subset\Delta_X} z_kz_nz^S\left(\prod_{i\in S\cup\{k,n\}}\prod_{j\in\Delta_n-(S\cup\{k,n\})}A_{ij}\right)\\
&= z_kz_n\sum_{S\subset X} z^S\left(\prod_{i\in S\cup\{k,n\}}\prod_{j\in X-S}A_{ij}\right),
\end{aligned}
$$

usamos que $\Delta_n-(\{k,n\}\cup S)=X-S$, portanto,

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{S\subset X} z^S\left(\prod_{j\in X-S}A_{k,j}A_{nj}\right)\left(\prod_{i\in S}\prod_{j\in X}A_{ij}\right)\\
&= \left(\prod_{j\in X}A_{k\,j}A_{nj}\right)\sum_{S\subset X} z^S\left(\prod_{i\in S}A_k^{-1}A_{ni}^{-1}\right)\left(\prod_{i\in S}\prod_{j\in X-S}A_{ij}\right)\\
&= \left(\prod_{j\in X}A_{k\,j}A_{nj}\right)\sum_{S\subset X}\left(\prod_{i\in X}(z_iA_k^{-1}A_{ni}^{-1}\right)\left(\prod_{i\in S}\prod_{j\in X-S}A_{ij}\right)\\
&= \left(\prod_{j\in\Delta_{n-2}}A_{k,j}A_{nj}\right)\sum_{S\subset X}\left(\prod_{i\in S}\xi_i\right)\left(\prod_{i\in S}\prod_{j\in X-S}A_{ij}\right),\quad \xi_i\equiv z_iA_k^{-1}A_{ni}^{-1}\\
&= \left(\prod_{j\in X}A_{k\,j}A_{nj}\right)\sum_{S\subset X}\xi^S\left(\prod_{i\in S}\prod_{j\in X-S}A_{ij}\right)\\
&= \left(\prod_{j\in X}A_{k,j}A_{nj}\right)\mathcal{P}_{n-2}(\{\xi_i\}_{i\in X}),
\end{aligned}
$$

logo, como para todo $i\in X$, $|z_i|\geq 1$ e $|A_{ij}|<1$, segue-se que $|\xi_i|>|z_i|\geq 1$, então, pela hipótese de indução, que assumimos válida para $n-2$, $\mathcal{P}_{n-2}(\{\xi_i\}_{i\in X})\neq 0$, o que implica que $D\neq 0$.

Note que em $Cz_n+Dz_kz_n$ temos os termos de $\mathcal{P}_n$ que contém z_n, ou seja, são provenientes de conjuntos da forma $S\cup\{n\}$, onde $S\subset\Delta_{n-1}$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
Cz_n+Dz_kz_n &= \sum_{S\subset\Delta_{n-1}} z^Sz_n\prod_{i\in S\cup\{n\}}\prod_{j\in\Delta_n-(S\cup\{n\})}A_{ij}\\
&= z_n\sum_{S\subset\Delta_{n-1}} z^S\prod_{i\in S\cup\{n\}}\prod_{j\in\Delta_{n-1}-S}A_{ij}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
C + Dz_k &= \sum_{S \subset \Delta_k} z^S \prod_{i \in S \cup \{n\}} \prod_{j \in \Delta_k - S} A_{ij} \\
&= \left(\prod_{j \in \Delta_k} A_{nj} \right) \sum_{S \subset \Delta_k} \left(\prod_{i \in S} A_{ni}^{-1} z_i \right) \prod_{i \in S} \prod_{j \in \Delta_k - S} A_{ij} \\
&= \left(\prod_{j \in \Delta_k} A_{nj} \right) \mathcal{P}_k(\xi_1, \ldots, \xi_k),
\end{aligned}
$$

onde $\xi_i = A_{ni}^{-1} z_i$. Portanto, se fizermos $z_k = -\frac{C}{D}$, teremos,

$$
0 = C + Dz_k = \left(\prod_{j \in \Delta_{n-1}} A_{nj} \right) P_{n-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}),
$$

ou seja, $P_{n-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = 0$, como $|z_i| \geq 1$, para todo $i \in \Delta_{n-2}$, então, $|\xi_i| > |z_i| \geq 1$, $i \in \Delta_{n-2}$ e, pela hipótese de indução, que assumimos válida para $n-1$, $|\xi_{n-1}| \leq 1$, ou seja,

$$
|-C/D| = |z_{n-1}| = |A_{n\,n-1} \xi_{n-1}| < |\xi_{n-1}| \leq 1.
$$

Note que $z_k = -C/D$ é a imagem de ∞ pela transformação de Möbius que leva z_n em z_k.

Suponha que o teorema a ser provado não fosse verdade, então existem z'_{n-1}, z'_n tais que $\mathcal{P}_n(z_1, \ldots, z_{n-2}, z'_{n-1}, z'_n) = 0$ e $|z_1| \geq 1, \ldots, |z_{n-2}| \geq 1$, $|z'_{n-1}| \geq 1|$ e $|z'_n| > 1$. Pelo Lema 3, com $k = n-1$, segue-se que a transformação (11) leva z'_n, ∞ em z'_{n-1}, $z_{n-1} = -\frac{C}{D}$, tal que $|z_{n-1}| < 1$. Portanto, podemos encontrar z''_n tal que $|z''_n| > 1$ e a sua imagem z''_{n-1} satisfaça $|z''_{n-1}| = 1$. De fato, se $|z_{n-1}| = 1$ faça $z''_{n-1} = z'_{n-1}$ e $z''_n = z'_n$ e estamos feito. Caso contrário, visto que $|z'_n| > 1$, podemos escolher uma reta Γ passando por z'_n mas não passando por $-\frac{B}{D}$, tal que ela não intercepte o círculo unitário $|z_n| = 1$, ou seja $|z_n| > 1$ para todo z em Γ. A imagem de Γ através de (11) será um círculo passando sobre $-\frac{C}{D}$ e z'_{n-1} e como $|\frac{C}{D}| < 1$ e $|z'_{n-1}| > 1$ este círculo intercepta o círculo unitário $|z_{n-1}| = 1$ em dois pontos, tome um deles, e chame-o de z''_{n-1} e seja z''_n a sua imagem inversa, como z''_n está em Γ, $|z''_n| > 1$. Portanto, temos

$$
|z_1| \geq 1, \ldots, |z_{n-2}| \geq 1, |z''_{n-1}| = 1 \quad e \quad |z''_n| > 1 \tag{13}
$$

$$\mathcal{P}_n(z_1, \ldots, z_{n-2}, z''_{n-1}, z''_n) = 0. \tag{14}$$

A seguir aplicando-se o Lema 1 com $k = n-2$, e obteremos $|z'''_{n-2}| = 1$ e $|z'''_n| > 1$, tais que $\mathcal{P}_n(z_1, \ldots, z_{n-3}, z'''_{n-2}, z''_{n-1}, z'''_n) = 0$. Podemos repetir este procedimento para $k = n-3, n-4, \ldots, 1$ e encontraremos números $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n$

$$\mathcal{P}_n(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n) = 0 \tag{15}$$

com $|\overline{z}_1| = 1$, ..., $|\overline{z}_{n-1}| = 1$, $|\overline{z}_n| > 1$. De (7), como $\overline{z_1}^* = \overline{z_1}^{-1}$, ..., $\overline{z_{n-1}}^* = \overline{z_{n-1}}^{-1}$, onde * é a operação de conjugação, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_n(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_{n-1}}, (\overline{z_n}^*)^{-1}) &= \mathcal{P}_n((\overline{z_1}^*)^{-1}, \ldots, (\overline{z_n}^*)^{-1}) \\
&= (\overline{z_1}^*)^{-1} \ldots (\overline{z_n}^*)^{-1} . \mathcal{P}_n(\overline{z_1}^*, \ldots, \overline{z_n}^*) \\
&= (\overline{z_1}^*)^{-1} \ldots (\overline{z_n}^*)^{-1} . \mathcal{P}_n(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n})^* = 0. \quad (16)
\end{aligned}$$

Comparando com (15) nos leva $\overline{z_n} = (\overline{z_n}^*)^{-1}$ em contradição, visto que $|\overline{z_n}| > 1$. ■

4 APÊNDICES

4.1 Apêndice A - Convergência no sentido de van Hove

Dado $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$, com $a_1 > 0, \ldots, a_d > 0$, defina

$$\Lambda(a) = \{x \in \mathbb{Z}^d \, : \, 0 \leq x_1 < a_i, \, i = 1, \ldots, d\}.$$

Se $\Lambda(a)$ é transladado por um vetor $na = (n_1a_1, \ldots, n_da_d)$ com $n \in \mathbb{Z}^d$, o resultado é o conjunto $\Lambda_n = \Lambda(a) + na$ e a família $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$ forma uma partição de $\mathbb{Z}^d$. Para todo $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ defina $N_a^+(\Lambda)$ como número de conjuntos Λ_n, tais que $\Lambda_n \cap \Lambda \neq \emptyset$ e $N_a^-(\Lambda)$ como número de conjuntos Λ_n, tais que $\Lambda_n \subset \Lambda$.

Definição 1 *Os conjuntos Λ tendem a infinito no sentido de Van Hove se*

$$\lim N_a^-(\Lambda) = +\infty \quad e \quad \lim N_a^-(\Lambda)/N_a^+(\Lambda) = 1,$$

para todo a.

4.2 Apêndice B

Neste apêndice, enunciaremos os Teoremas de Vitali e de Hurwitz (veja referência [3]).

Teorema de Vitali. *Seja $g_n(z)$ uma seqüência de funções analíticas numa região $\mathcal{D}$; e*

$$|g_n(z)| \leq M$$

para todo n e z em $\mathcal{D}$, e suponha que $g_n(z)$ tenda a um limite quando $n \to \infty$, em um conjunto com ponto de acumulação dentro de $\mathcal{D}$. Então, $g_n(z)$ tende uniformemente a um limite em qualquer região limitada por um contorno no interior de $\mathcal{D}$, o limite sendo, portanto uma função analítica de z.

Teorema de Hurwitz *Seja $g_n(z)$ uma seqüência de funções analíticas numa região $\mathcal{D}$ limitada por uma curva fechada simples e $g_n(z) \to g(z)$ uniformemente em $\mathcal{D}$. Suponha que $g(z)$ não é identicamente nula. Seja z_o um ponto no interior de $\mathcal{D}$. Então, z_o é um zero de $g(z)$ se, e somente se, é um ponto de acumulação do conjunto de zeros das funções $g_n(z)$, pontos que são zeros de uma infinidade de valores de n sendo contados como pontos de acumulação.*

Referências

[1] Lee, T. D., Yang, C. N. - *Statistical Theory of Equations of state and Phase Transitions II. Lattice Gas and Ising Model* Physical Review **87**, number 3 (1952)

[2] Glimm, James e Jaffe Arthur, *Quantum Physics - Functional Integral Point of View*, Springer-Verlag, 1981.

Braga, Gastão de Almeida - *Seminário apresentado na Regional da S.B.M - Viçosa, 21 a 23/11/90*

[3] Titchmarsh, E.C - *The Theory of Functions* 2nd ed., Oxford University Press, New York (1939).

[4] Ruelle, David - *Statistical Mechanics, Rigorous Results*, W.A.Benjamin, Inc. (1969).

[5] Israel, R. B. - *Convexity in the Theory of Lattice Gas* Princeton University Press (1979).